2024年度

【東大理系数学】

（講座番号１００）

【成瀬予備校】

東大理系数学を受講するにあたって

受講前に行うこと

(1) 必ず予習してから受講してください.

(2) 入試当日の緊張感を持ち, 制限時間内に論理に矛盾がない答案作成 (減点されない答案作成) を心がけてください.

制限時間内に答案を作成できた場合

(1) 答案の作成を終えたら, 答案の最初の一行から最後の一行まで,「論理に矛盾がないか」時間をかけて丁寧に確認してください.

(2) 論理に矛盾がないことを確認でき, 自信を持って答案作成できたのであれば, 当該講義を受講する必要はありません.

制限時間内に答案を作成できなかった場合

(1) 教科書・参考書・講義等を併用して, 時間の許す限り答案の完成を試みてください.

(2) 答案の作成を終えたら, 答案の最初の一行から最後の一行まで,「論理に矛盾がないか」時間をかけて丁寧に確認してください.

(3) 論理に矛盾がないことを確認でき, 自信を持って答案作成できたのであれば, 当該講義を受講する必要はありません.

受講後に行うこと

(1) 答案に「不備があった」または「論理に矛盾があった」場合, なぜ不備や論理に矛盾があったのか, 十分に復習を行なってください.

(2) 十分に復習を行なった後, 再度当該講義の問題を解き,「不備がない」「論理に矛盾がない」答案が作成できれば終了です.

目 次

第 1 章　二次関数 (数学 I)

1.1　解の配置と共有点の条件　(標準)

(制限時間 : 25 分)

a, b を実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす．

(1)　点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 51 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 113 分)

目次に戻る

1.2　2 次不等式と集合の一致　(やや難)

(制限時間 : 25 分)

a, b, c, p を実数とする．不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$bx^2 + cx + a > 0$$
$$cx^2 + ax + b > 0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x > p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする．

(1)　a, b, c はすべて 0 以上であることを示せ.

(2)　a, b, c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ.

(3)　$p = 0$ であることを示せ.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 35 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 154 分)

目次に戻る

第2章　正弦定理・余弦定理 (数学 I)

2.1　円に内接する四角形　(やや易)

(制限時間 : 20 分)

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している．この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ．

(東京大)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 47 分)

目次に戻る

第**3**章　図形の性質 **(**数学 **A)**

3.1　条件を満たす点の動きうる範囲の面積　(標準)

(制限時間 : 20 分)

平面上の点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す．また，$\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR} = 0$ とする．

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC} = 1$ とする．この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX} + \triangle\mathrm{BCX} + \triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 46 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 91 分)

目次に戻る

第**4**章　場合の数 **(**数学 **A)**

4.1　条件を満たす部分集合の個数　(やや難)

(制限時間 : 25 分)

N を 5 以上の整数とする．1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ．ただし 1 は必ず選ぶこととする．選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える．

条件 1 ： S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない．

条件 2 ： S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む．

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l,\ l+1, \cdots\cdots, l+k-1\}$ と表される集合を指す．例えば $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1, 2, 3\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{8, 9, 10\}$ を含む．

(1)　条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか.

(2)　条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 46 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 130 分)

目次に戻る

4.2　点と直線の規則性　(やや難)

(制限時間 : 25 分)

　座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \quad (a = 1, 2, 3, 4), \qquad y = b \quad (b = 1, 2, 3, 4)$$

がある．以下，16 個の点

$$(a, b) \quad (a = 1, 2, 3, 4, \quad b = 1, 2, 3, 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える．

(1)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか.

　　上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある．

(2)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか.

　　上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 44 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 124 分)

目次に戻る

第5章　確率 (数学 A)

5.1　直線上にある確率　(標準)

(制限時間 : 20 分)

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点 P を考える．

(a) 最初に，点 P は原点 O にある．

(b) ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1)　最初から 1 秒後の点 P の座標を (s, t) とする．$t - s = -1$ となる確率を求めよ．

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 41 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 73 分)

目次に戻る

5.2　文字列が条件を満たす確率　(標準)

(制限時間 : 25 分)

どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く．さいころを投げ，出た目が $1,2,3$ のときは文字列 A A を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，A A，B，C，D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に $2,5,6,3,4$ であったとすると，得られる文字列は,

$$\mathrm{A\,A\,C\,D\,A\,A\,B}$$

となる．このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である．

(1)　n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2)　n を 2 以上の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 49 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 135 分)

目次に戻る

5.3　正八角形と反復試行　(やや難)

(制限時間 : 25 分)

正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする．また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある．

点 P が最初に点 A にある．次の操作を 10 回繰り返す．

操作 ： コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる．

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる．

以下の事象を考える．

事象 S ： 操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある．

事象 T ： 1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する．

(1)　事象 S が起こる確率を求めよ．

(2)　事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 40 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 102 分)

目次に戻る

5.4　点列が原点に戻る確率　(難)

(制限時間 : 35 分)

O を原点とする座標平面上で考える．0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める．投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $X_0, X_1, X_2, \cdots\cdots, X_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める．

(i) X_0 は O にある．

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする．X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める．

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{OX_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める．ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする．

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める．

(1)　$N = 8$ とする．X_8 が O にある確率を求めよ．

(2)　$N = 200$ とする．X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく．ただし $0 \leqq r \leqq 200$ である．p_r を求めよ．また p_r が最大となる r の値を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 67 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 293 分)

目次に戻る

第6章　整数 (数学 A)

6.1　数列と既約分数　(標準)

(制限時間 : 20 分)

　数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

で定める.

(1)　$n \geqq 2$ とする. $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ.

(2)　a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 39 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 70 分)

目次に戻る

6.2　平方数にならないことの証明　(標準)

(制限時間 : 25 分)

n を 1 以上の整数とする.

(1)　n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ.

(2)　$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)

(講義時間 : 24 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)

(講義時間 : 96 分)

目次に戻る

6.3　二項係数と剰余類　(難)

(制限時間 : 40 分)

以下の問いに答えよ.

(1)　正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする．K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ.

(2)　正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする．このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ.

(3)　a, b は (2) の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする．${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ.

(4)　${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 48 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 187 分)

目次に戻る

6.4　漸化式で定義された整数の数列の剰余　(難)

(制限時間 : 40 分)

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　正の整数 n が 3 の倍数のとき, a_n は 5 の倍数となることを示せ.

(2)　k, n を正の整数とする. a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k, n を用いて表せ.

(3)　a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 60 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 196 分)

目次に戻る

第7章　数と式 (数学 II)

7.1　4次式の因数分解　(やや難)

(制限時間 : 25 分)

定数 b, c, p, q, r に対し，

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が x についての恒等式であるとする．

(1)　$p \neq 0$ であるとき，q, r を p, b で表せ．

(2)　$p \neq 0$ とする．b, c が定数 a を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \quad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\left\{p^2 - (a^2 + 1)\right\}\left\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\right\} = 0$$

を満たすものを 1 組求めよ．

(3)　a を整数とする．x の 4 次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 51 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 241 分)

目次に戻る

7.2　数列と整式の恒等式　(やや難)

(制限時間 : 30 分)

n, k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる．k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく．例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である．

(1)　2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ．

(2)　1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}\,x + a_{n,2}\,x^2 + \cdots\cdots + a_{n,n}\,x^n$$

を考える．$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ．

(3)　$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 39 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 189 分)

目次に戻る

第8章　図形と方程式 (数学 II)

8.1 放物線の共通接線 (標準)

(制限時間 : 20 分)

k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える．

$$C : \quad y = x^2 + k$$
$$D : \quad x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ．ただし $a \neq -1$ とする．

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める．このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)

(講義時間 : 34 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)

(講義時間 : 116 分)

目次に戻る

8.2　放物線に接する直交する 2 直線　(やや難)

(制限時間 : 25 分)

a, b を実数とする．座標平面上の放物線 $y = x^2 + ax + b$ を C とおく．C は，原点で垂直に交わる 2 本の接線 ℓ_1, ℓ_2 を持つとする．ただし，C と ℓ_1 の接点 P_1 の x 座標は，C と ℓ_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする．

(1)　b を a で表せ．また a の値はすべての実数をとりうることを示せ．

(2)　$i = 1, 2$ に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心を持ち，点 P_i で ℓ_i と接するものと定める．D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき，a の値を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 53 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 306 分)

目次に戻る

第**9**章　軌跡と領域 **(**数学 **II)**

9.1　線分の通過領域　(やや難)

(制限時間 : **25** 分)

座標平面の原点を O で表す.

線分 $y=\sqrt{3}x\ (0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x\ (-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の 通過する領域を D とする.

(1)　s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ.

(2)　D を図示せよ.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)

(講義時間 : 34 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)

(講義時間 : 235 分)

目次に戻る

第10章　三角関数 (数学 II)

10.1　2 つの円の共通接線　(標準)

(制限時間 : 25 分)

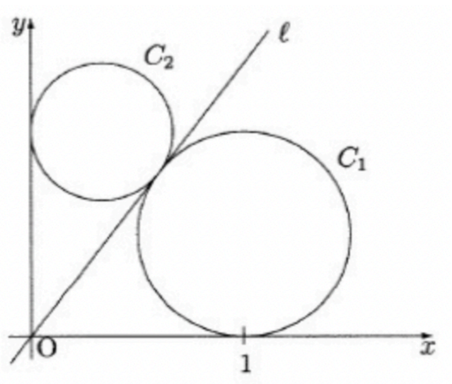
ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の 3 条件 (i), (ii), (iii) で定まる円 C_1, C_2 を考える．

(i) 円 C_1, C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ii) 円 C_1, C_2 は直線 ℓ と同一点で接する．

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 ℓ の方程式と，その最小値を求めよ．



(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 35 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 108 分)

目次に戻る

第11章　対数関数 (数学 II)

11.1　指数不等式を満たす最小の自然数　(やや難)

(制限時間 : 20 分)

以下の問いに答えよ．必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい．

(1)　$5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(2)　$5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 47 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 114 分)

目次に戻る

第 12 章　微分法 (数学 II)

12.1　法線が曲線と異なる 3 つの共有点をもつ条件　(標準)

(制限時間 : 25 分)

　$y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}\left(\alpha,\, \alpha^3 - \alpha\right)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ とする．C と ℓ は相異なる 3 点で交わるとする．

(1)　α のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　C と ℓ の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を $\beta,\ \gamma$ とする．ただし $\beta < \gamma$ とする．$\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \neq 0$ となることを示せ．

(3)　(2) の $\beta,\ \gamma$ を用いて，

$$u = 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1}$$

と定める．このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)

(講義時間 : 62 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)

(講義時間 : 201 分)

目次に戻る

12.2　正方形領域と放物線の共通部分　(やや難)

(制限時間 : 25 分)

　O を原点とする座標平面上で考える．座標平面上の 2 点 $\mathrm{S}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{T}(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する．

　不等式

$$0 \leqq x \leqq 3, \quad 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(3, 3)$ を考える．さらに，次の条件 (i), (ii) をともに満たす点 P をとる．

(i) 点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある．

(ii) 点 P は，3 点 O, A, B のいずれからも十分離れている．

点 P の x 座標を a とする．

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　次の条件 (iii), (iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ．

　(iii)　点 Q は領域 D の点である．

　(iv)　点 Q は，4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている．

(3)　a は (1) で求めた範囲を動くとする．(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 58 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 403 分)

目次に戻る

第13章　微分法・積分法 (数学 II)

13.1　点と直線に関する全称命題と存在命題　(やや難)

(制限時間 : 30 分)

座標平面上の曲線

$$C: \quad y = x^3 - x$$

を考える.

(1)　座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ.

　(i)　点 P を通る直線 ℓ で, 曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する.

(2)　次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ.

　(ii)　点 P を通る直線 ℓ で, 曲線 C と相異なる 3 点で交わり, かつ, 直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 42 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 220 分)

目次に戻る

第14章　数列 (数学B)

14.1　整数列の剰余の周期性　(やや難)

(制限時間 : 30 分)

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n^2 + n(n+2) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ.

(2)　a_{2022}, a_{2023}, a_{2024} の最大公約数を求めよ.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 55 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 172 分)

目次に戻る

14.2　小数部分からなる数列　(やや難)

(制限時間 : 30 分)

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す．実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める．

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ．

(3)　a が有理数であるとする．a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 54 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 274 分)

目次に戻る

第**15**章　数列の極限 **(**数学 III**)**

15.1　方程式の解と数列の極限　(標準)

(制限時間 : 25 分)

以下の問いに答えよ.

(1)　n を 1 以上の整数とする. x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は, ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ.

(2)　(1) で定まる a_n に対し, $\cos a_n > \cos 1$ を示せ.

(3)　(1) で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ に対し,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} a_n^n, \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ.

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 57 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 202 分)

目次に戻る

第16章　微分法 (数学 III)

16.1　関数によるネイピア数の評価　(標準)

(制限時間 : 20 分)

e を自然対数の底，すなわち $e = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 71 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 126 分)

目次に戻る

第 17 章　空間図形

17.1　四面体の外接球の半径　(標準)

(制限時間 : 25 分)

半径 r の球面上に 4 点 $\mathrm{A, B, C, D}$ がある．四面体 ABCD の各辺の長さは，$\mathrm{AB} = \sqrt{3}$，$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = 2$ を満たしている．このとき r の値を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 46 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 63 分)

目次に戻る

17.2　三角形の面積の最小値　(標準)

(制限時間 : 25 分)

a を $1 < a < 3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,0,1)$, $\mathrm{P}_2(1,1,1)$, $\mathrm{P}_3(1,0,3)$, $\mathrm{Q}(0,0,a)$ を考える．直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$, $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$, $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ．

(東京大)

講義 part.1 部分を視聴 (無料)
(講義時間 : 53 分)

講義フル ver を視聴 (現在無料)
(講義時間 : 147 分)

目次に戻る